

Lemme : Soit E un K -ev de dimension n . Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$.

Alors $\exists \varphi \in E^*$ et $\exists x \in E$ tq $F = \text{Vect}(x, v(x), \dots, v^{q-1}(x))$ et $G = \text{Vect}(\varphi, v(\varphi), \dots, (v^{q-1}(\varphi))^0)$ sont stables par v , et $E = F \oplus G$.

Puisque $\forall k \in \mathbb{N}$, $(v_k)^k = (v_k)^k$, v est nilpotent d'ordre q . Donc $\exists \varphi \in E^*$ tq $(v^{q-1}(\varphi)) \neq 0$ i.e. $\varphi \circ v^{q-1} \neq 0$.
D'où $\exists x \in E \setminus \{0\}$ tq $\varphi(v^{q-1}(x)) \neq 0$ et nécessairement $v^{q-1}(x) \neq 0$.

Ainsi $\{x, v(x), \dots, v^{q-1}(x)\}$ et $\{\varphi, v(\varphi), \dots, (v^{q-1}(\varphi))^0\}$ sont libres. Donc $F = \text{Vect}(x, v(x), \dots, v^{q-1}(x))$ est stable par v , de dimension q . par récurrence

Comme $H = \text{Vect}(\varphi, v(\varphi), \dots, (v^{q-1}(\varphi))^0)$ est stable par v , H^0 est stable par v , et de dimension $n-q$.

Donc $\dim(F) + \dim(H^0) = \dim(E) = n$.

Ng $F \cap H^0 = \{0\}$: Soit $y = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k v^k(x) \in F \cap H^0$. Alors $v^{q-1}(y) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k v^{q-1}(x) \in F$ et $0 = \varphi(v^{q-1}(y)) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k \underbrace{\varphi(v^{q-1}(x))}_{\neq 0}$

D'où $\lambda_0 = 0$.

Par récurrence, si $\lambda_0 = \dots = \lambda_{j-1} = 0$, $0 \leq j \leq q-2$, alors $y = \sum_{k=j}^{q-1} \lambda_k v^k(x)$.

On a: $v^{q-j-2}(y) = \sum_{k=j}^{q-1} \lambda_k v^{q-j-2}(x) \in F$ et $0 = \varphi(v^{q-j-2}(y)) = \sum_{k=j}^{q-1} \lambda_k \underbrace{\varphi(v^{q-j-2}(x))}_{\neq 0} \Rightarrow \lambda_{j+1} = 0$.

Donc $F \cap H^0 = \{0\}$.

D'où $E = F \oplus H^0$ avec F et H^0 stables par v .

Théorème : Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$.

Alors $\exists \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ base de E tq $E_i = \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$ stable par v et $\text{Mat}_{\mathcal{B}_i}(v|_{E_i}) = \begin{pmatrix} 0 & (0) \\ 1 & \ddots \\ (0) & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

$n=1$: Alors $v=0$: OK

Hérédité: Supposons la propriété vraie pour les ev de dimension $< n$.

Soit $x \in E$ tq $v^{q-1}(x) \neq 0$ et $\mathcal{B}_1 = \{x, v(x), \dots, v^{q-1}(x)\}$. Alors $F = \text{Vect}(\mathcal{B}_1)$ est stable par v .

et $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(v|_F) = \begin{pmatrix} 0 & (0) \\ 1 & \ddots \\ (0) & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $q=n$, c'est fini.

Si non, on complète $\mathcal{B}_1$ par $\mathcal{B}_2$ où $\mathcal{B}_2$ est une base de G supplémentaire de F stable par v (Lemme).

Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2}(v) = \begin{pmatrix} \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(v|_F) & (0) \\ (0) & \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(v|_G) \end{pmatrix}$ où $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(v|_G) \in M_{n-q}(K)$.

Puisque $v|_G$ est nilpotent et $\dim G = n-q < n$, on conclut par hypothèse de récurrence.